

平面上の線に関する研究

稲垣三郎

1. 平面上のすべての点は有限な二数の組即ち座標 (x, y) によって表わされる点と、唯一つの、座標では表わし得ない点（これを無限遠点という）とである。

2. 無限遠点は平面上の任意の点（無限遠点を除く）から無限に遠い所にある。

3. 無限遠点は平面上の任意の点（無限遠点を除く）から不定の方向にある。

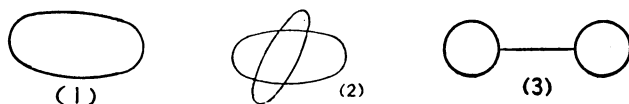
上述の 1. に述べたことは、座標によって表わされる無数の点と、無限遠点と称する唯一つの点との他には平面上に点は存在しないことを主張するのである。特に無限遠点は唯一つであるという所に意義がある。

平面上の点を上述のように規約して平面上の線に関する性質を研究しよう。

(1°) 何れかの方向に無限に伸びた枝をもつ曲線または直線は無限遠点を通る。

何故ならば無限に伸びた枝には有限な座標で表わし得ない点を少くとも一つ持つからである。

〔定義〕 平面上の一点を出発してこの平面上を動き、再びこの出発点に戻ったときに出来る線のうち、重複点が多くとも有限個であるとき、この線を単純閉線と呼ぶ。



上図で (1) と (2) は単純閉線で、(3) は単純閉線ではない。

(2°) 直線は単純閉線である。

〔証明〕 直線は両方に無限の枝をもつ。(1°) によって、この両方共唯一つの無限遠点を通る。且つ重複点の一つもない。故に直線は単純閉線である。

Q. E. D.

端のない無限に伸びた枝をもつ曲線についても同様である。故に次の定理が得られる。

(3°) 平面上の線はすべて単純閉線か、または両端をもつ線である。

〔例1〕 次の図のような曲線はAを出発してBに至る両端をもつ曲線と見られる。また両端をもつ線ABと、一つの単純閉線との合成とも見られる。然しこの図形全体を単純閉線と見ることは出来ない。



〔例2〕 線分・半直線は両端をもつ線である。半直線の一端は無限遠点である。

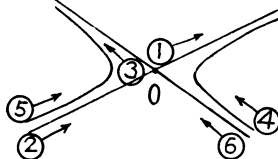
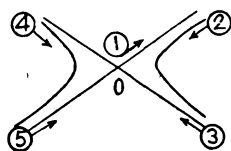
〔例3〕 放物線は無限遠点を通る単一の単純閉線である。

〔定義〕 単純閉線のうちで最も簡単なもの、即ち重複点を有しないものを線単位という。

例・直線、放物線、楕円等は線単位である。

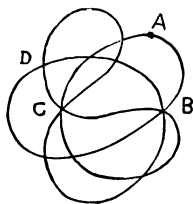
〔例4〕 双曲線は無限遠点を通る単純閉線で、二つの線単位が無限遠点で連結されたものである。

〔例5〕 双曲線と漸近線から成る図形もまた無限遠点を重複点とする単純閉線である。そして無限遠点で連結された四つの線単位から出来ている。次の図は原点Oを出発して再び原点へ戻る状況を示す。



〔例6〕 次図のような曲線には端がない、即ち単純閉線である。Aから出発してもBから出発しても同一線上を再び通ることなしに、必ず出発点に戻る事が出来る。

〔例7〕 右の図でAとBを線で結ぶと、単純閉線ではなくなる。



例6で、重複点B、Cでは6本の枝が出ています。又Dでは4本の枝が出ています。このように単純閉線

では重複点においては必ず偶数個の枝が出ています。AとBを結ぶとA点及びB点では奇数個の枝が出て単純閉線でなくなる。これは後に証明しよう。

単純閉線の積

〔定義〕 二つの単純閉線で合成された図形をそれ等の積という。

(4°) 二つの単純閉線が有限個の共有点をもてば、それ等の積は一つの単純閉線である。

〔例8〕 双曲線は単純閉線である。漸近線も単純閉線である。且つ無限遠点を共有する。故にこの二つの積は又単純閉線である。

双曲線を $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ で表わせば、漸近線は $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ である。
この積

$$\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1\right) = 0$$

は単純閉線である。

(5°) 二つの単純閉線の積が共有点をもたないか、または無限個の共有点をもつ場合には、その積は一つの単純閉線とはならない。

〔例9〕 $x^2 + y^2 - 1 = 0$, $y - 2 = 0$ はいずれも単純閉線である。ところがこの二つは共有点をもたないから、積 $(x^2 + y^2 - 1)(y - 2) = 0$ は一つの単純閉線ではなくて、独立した二つの単純閉線線となる。(共有点のない積の例)

〔例10〕 $x^2 - y^2 = 0$ …… (1) $(x - y)(x + y - 1) = 0$ …… (2)
はいずれも単純閉線である。ところが積

$$(x^2 - y^2)(x - y)(x + y - 1) = 0$$

は単純閉線ではない。理由は積を書きかえると

$$(x - y)^2(x + y)(x + y - 1) = 0 \dots\dots\dots (3)$$

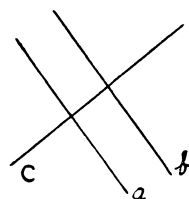
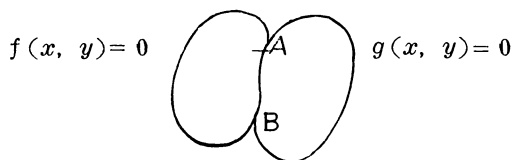
これには二重線 $(x - y)^2 = 0$ があるから (3) は定義によって単純閉線ではない。

〔注意〕 図の上だけで見ると、前例の積は単純閉線

$$(x - y)(x + y - 1)(x + y) = 0$$

と変らないが、(3)はCが二重線となるため、定義によって単純閉線でない。(無限個の共有点をもつ例)

〔例11〕 二つの単純閉線 $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ が曲線ABを共有する場合、積 $f(x, y)g(x, y) = 0$ は単純閉線ではない。



左図によって明らかである。

単純閉線の分解

(6°) 単純閉線の任意の点から出発して、それに属するすべての線を唯一回だけ通って、この出発点に戻り得る。(単純閉線の定義より明かである。)

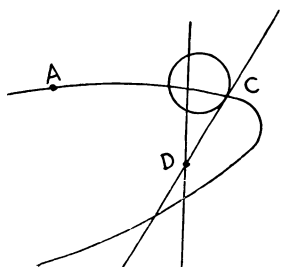
(7°) 単純閉線のすべての重複点は偶数個の枝を持つ。

〔証明〕 6° により単純閉線は何れの点から出発してもすべてこの線を一巡して元の点に戻り得るから、重複点から出発して再びその点に戻る毎に 2 本の枝（出るときの線と入るときの線）を要する。故に n 回その重複点を通るならば $2n$ 個の枝をもつ。

(8°) 重複点を有する単純閉線は幾つかの線単元に分解出来る。

〔証明〕 単純閉線 F の一つの重複点 A から出発して再び A に戻る単純閉線を f_1 , 第 2 回目に A を出発して f_1 を除いた残りの線を通して再び A に戻る単純閉線を f_2 , 第 3 回目に A を出発して f_1, f_2 を除いた残りの線を通して再び A に戻る単純閉線を f_3 , 以下同様にしてすべての線を一巡し得る。 A が $2n$ 個の枝を持つ場合には, F は分解されて $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ の n 個単純閉線を得る。 f_i が更に重複点 B を持てば同様に g_1, g_2, \dots, g_m の m 個の単純閉線に分解出来る。次に g_j が重複点をもてば同様に h_1, h_2, \dots, h_l の l 個の単純閉線に分解出来る。かようにして遂には, 重複点が有限個であるから, 単純閉線の最も簡単なもの即ち線単位のみとなる。

〔例 12〕 例 6 の図で各領域相互の隣接関係を変えないで, 曲線の形は自由に



変え得るものとし, B 点を無限遠点とすることによって左のような図が得られた。これは幾つの線単元に分解されるか。 答 4 個

〔注意〕 単純閉線の何れの点が無限遠点にあっても線単元の個数及び領域の分布状態は変らない。

(9°) 線単位 $g(x, y) = 0$ の一つの領域における任意の点の座標を (ξ, η) とすると, $g'(\xi, \eta)$ は常に一定の符号をもつ。

〔証明〕 $g(x, y) = 0$ は連続である。この一つの領域内に二点 $A(\xi_1, \eta_1)$, $B(\xi_2, \eta_2)$ をとり, 領域内で A, B 二点を任意の曲線で結ぶ。今もし $g(\xi_1, \eta_1)$ と $g(\xi_2, \eta_2)$ が異符号であるとする, この曲線上で $g(\xi, \eta) = 0$ となる点が少なくとも一つはある。これは仮設に反する。故にこの領域内では, $g(\xi, \eta)$ の符号は一定である。

(10°) $f(x, y) = 0$ は単純閉線を表わすものとする。この線によって分けられた相隣る領域を A, B とする。領域 A 内の点を $S(x_1, y_1)$ B 内の点を $T(x_2, y_2)$ とすると

$$f(x_1, y_1) f(x_2, y_2) < 0$$

〔証明〕 $f(x, y) = 0$ は単純閉線であるから, 線単元に分解出来る。領域 A と領域 B の境界をなす線単元を $g(x, y) = 0$ とする。

$$f(x, y) \equiv g(x, y) f_1(x, y) \dots\dots\dots (1)$$

g 上の一点を $P(x_0, y_0)$ とし、 A の領域内で P に十分近い点 $K(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ をとり、 P に関して K の対称点 $L(x_0 - \Delta x, y_0 - \Delta y)$ を領域 B 内にあるようにすることが出来る。今 $g(x, y) = 0$ が P において微分可能とすると、

$$g(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \doteq g(x_0, y_0) + \frac{\partial g}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial g}{\partial y} \Delta y$$

ここで $g(x_0, y_0) = 0$, また $g(x, y) = 0$ は二重線でないから $x = x_0, y = y_0$ においては、 $\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}$ のうち少くとも一つは 0 でない。

$$\therefore g(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = \frac{\partial g}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial g}{\partial y} \Delta y \dots\dots\dots (2)$$

同様にして

$$g(x_0 - \Delta x, y_0 - \Delta y) = \frac{\partial g}{\partial x} (-\Delta x) + \frac{\partial g}{\partial y} (-\Delta y) \dots\dots (3)$$

(2) \times (3) より

$$g(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) g(x_0 - \Delta x, y_0 - \Delta y) \doteq - \left(\frac{\partial g}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial g}{\partial y} \Delta y \right)^2 < 0$$

前定理によれば

$g(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ と $g(x_1, y_1)$ は同符号

$g(x_0 - \Delta x, y_0 - \Delta y)$ と $g(x_2, y_2)$ も同符号

$$\therefore g(x_1, y_1) g(x_2, y_2) < 0 \dots\dots\dots (4)$$

ところが(1)より

$$f(x_1, y_1) = g(x_1, y_1) f_1(x_1, y_1)$$

$$f(x_2, y_2) = g(x_2, y_2) f_1(x_2, y_2)$$

ここで、点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ は $f_1(x, y) = 0$ に関しては同一領域内である。故に 9° により

$$f_1(x_1, y_1), f_1(x_2, y_2) > 0 \dots\dots\dots (5)$$

$$\therefore f(x_1, y_1) f(x_2, y_2) = g(x_1, y_1) g(x_2, y_2) f_1(x_1, y_1) f_1(x_2, y_2)$$

(4) と (5) より

$$f(x_1, y_1) f(x_2, y_2) < 0$$

〔例 13〕 $Pxy(ax^2 - by^2)(ax^2 - by^2 - c)(kx^2 + ly^2 - m)$ の領域

(a, b, c, k, l, m は正数)

