

# 数体における相反方程式

鹿 間 春 一 郎

## (1) 奇数次の相反方程式

$a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$  を数体  $\mathbf{K}$  の数とする。

$(a_1 \neq 0)$   $n$  は有限なる正整数。

$$g(x) = a_1 x^{2n+1} + a_2 x^{2n} + a_3 x^{2n-1} + \dots + a_n x^{n+2} + a_{n+1} x^{n+1} + a_{n+1} x^n + a^n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_3 x^2 + a_2 x + a_1 = 0 \quad \text{①}$$

$x = -1$  を代入すると

$$g(-1) = -a_1 + a_2 - a_3 + \dots + a_n (-1)^{n+2} + a_{n+1} (-1)^{n+1} + a_{n+1} (-1)^n + a^n (-1)^{n-1} + a_{n-1} (-1)^{n-2} + \dots + a_3 - a_2 + a_1 = 0$$

なる故  $x = -1$  は  $g(x) = 0$  の根である。即ち、奇数次の相反方程式は常に  $-1$  なる根を持つ。故に  $g(x)$  は  $(x+1)$  なる約数を持つ。( $\mathbf{K}$  において常に可約)

今  $g(x)$  を  $(x+1)$  で割った商を  $h(x)$  とすると、

$$(x+1)h(x) = g(x)$$

$h(x)$  は  $2n$  次の式であるから、 $b_1 b_2 b_3 \dots b_n, b_{n+1}$  を  $\mathbf{K}$  における数とすると、

$$h(x) = b_1 x^{2n} + b_2 x^{2n-1} + \dots + b_n x^{n+1} + b_{n+1} x^n + b_{n+2} x^{n-1} + \dots + b_{2n} x + b_{2n+1}$$

$$a_1 = b_1, \quad a_2 = b_1 + b_2, \quad a_3 = b_2 + b_3, \quad \dots, \quad a_n = b_{n-1} + b_n, \quad a_{n+1} = b_n + b_{n+1}, \quad a_n = b_{n+1} + b_{n+2}, \dots, \quad a_2 = b_{2n} + b_{2n+1}, \quad a_1 = b_{2n+1}$$

これより  $b_1 = b_{2n+1}, b_2 = b_{2n}, b_3 = b_{2n-1}, \dots, b_n = b_{n+2}$  が得られ

$$h(x) = b_1 x^{2n} + b_2 x^{2n-1} + b_3 x^{2n-2} + \dots + b_n x^{n+1} + b_{n+1} x^n + b_n x^{n-1} + \dots + b_2 x + b_1$$

となり  $h(x) = 0$  は  $2n$  次、即ち偶数次の相反方程式となる。

## (2) 偶数次の相反方程式の解法

$$f(x) = b_1 x^{2n} + b_2 x^{2n-1} + \dots + b_n x^{n+1} + b_{n+1} x^n + b_{n+1} x^{n-1} + \dots + b_2 x + b_1 = 0 \quad \text{②}$$

$(b_1, b_2, \dots, b_n, b_{n+1})$  は  $\mathbf{K}$  の数で  $b_1 \neq 0$

$x = 0$  は明らかに②の根ではないから、 $x^n$  で両辺を割って、

$$b_1 \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) + b_2 \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) + \dots + b_n \left(x + \frac{1}{x}\right) + b_{n+1} = 0 \quad \text{③}$$

を得ると②と③とは同値である。

$$\text{今 } x + \frac{1}{x} = y \text{ とおくと}$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y$$

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = y^4 - 4y^2 + 2$$

⋮

$$x^n + \frac{1}{x^n} = y^n - n C_1 (x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}) - n C_2 (x^{n-4} + \frac{1}{x^{n-4}}) - \dots$$

となり、更に  $(x^{n-2r} + \frac{1}{x^{n-2r}})$  は  $y$  の  $n-2r$  次の整式（係数は  $\mathbf{K}$  の数）であらわされる故、  
 $d_1, d_2, \dots$  は正負の有理整数として、

$$x^n + \frac{1}{x^n} = y^n + d_1 y^{n-2} + d_2 y^{n-4} + \dots \text{となる}$$

従って、 $f(x) = 0$  は

$$F(y) = c_0 y^n + c_1 y^{n-1} + c_2 y^{n-2} + \dots + c_{n-1} y + c_n = 0 \dots\dots\dots (4)$$

と書ける。ここで  $k, l, m, \dots, p, q, r, \dots$  は正負の整数で、

$$c_0 = b_1$$

$$c_1 = b_2$$

$$c_2 = b_3 + k b_1$$

$$c_3 = b_4 + l b_2$$

⋮

$$c_{n-1} = b_n + p b_{n-2} + q b_{n-4} + \dots$$

$$c_n = b_{n+1} + s b_{n-1} + t b_{n-3} + \dots$$

従って  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$  は  $\mathbf{K}$  の数である。

④の根が  $y = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$  と解けたとすると、 $x + \frac{1}{x} = \alpha_r$  より  $x = \frac{\alpha_r \pm \sqrt{\alpha_r^2 - 4}}{2}$  として

③が解けることとなる。すなわち、 $2n$  次の  $\mathbf{K}$  における相反方程式を解くことは、 $\mathbf{K}$  における  $n$  次の方程式を解くことに帰着されるわけである。

又  $x + \frac{1}{x} = \alpha_r$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ) なることより  $x^2 - \alpha_r x + 1 = 0$  としてその 2 根を  $\beta_1, \beta_2$  とすれば、 $\beta_1 \beta_2 = 1$

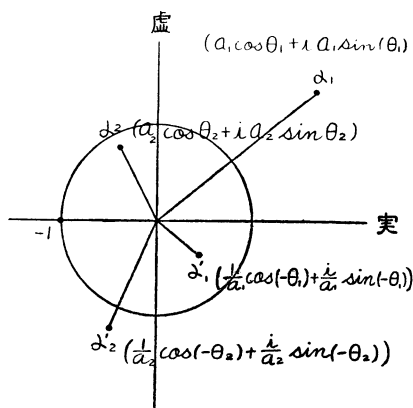
よって、偶数次の相反方程式は互に逆数の組になった根を持つ。…… (A)

奇数次の相反方程式はこの上に更に  $-1$  の根を持ち、 $-1$  はそれ自身の逆数であるから、同様に (A) の性質を持つことになる。

$a(\cos\theta + i\sin\theta)$  の逆数  $\frac{1}{a(\cos\theta + i\sin\theta)}$  は

$\frac{1}{a} \{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\}$  であらわされる故、  
 相反方程式の根をガウスの平面上に幾何学的表示するとき、次の性質がある。

- (1) 単位円周に関して外側と内側に分布する根の数は相ひとしい。
- (2) 実数軸に関して上と下に分布する根の数は相ひとしい。



### (3) 相反方程式の代数的可解性

( $2n+1$ ) 次ならびに  $2n$  次の数体  $\mathbf{K}$  における相反方

程式は  $n$  次の  $\mathbf{K}$  における方程式を解くことに帰着されるのであるから、常に代数的に可解である  $n = 1, 2, 3, 4$  の場合、即ち 9 次以下の相反方程式は常に代数的に可解である。また言い換えれば 10 次以上の相反方程式は一般に代数的に解くことはできない。今  $\mathbf{K}$  を有理数体、実数体、複素数体と拡大するとき、奇数次の相反方程式は常に  $\mathbf{K}$  において可約であり ( $x+1$  なる因 数 を 常 に 持 つ) また (2) より、1 次の時は  $\mathbf{K}$  の如何にかかわらず有理整数  $-1$  の根を持ち、2 ～ 9 次の時は一般に複素数体までひろげての中に根を持つ。