

実践報告

センス・オブ・ワンダーを育む「算数概論」の教材開発と実践（Ⅱ）

小 西 豊 文

An Introduction to Arithmetic that Cultivates a Sense of Wonder: Development of Learning Materials and Implementation of Lesson Plans (Part II)

KONISHI Toyofumi

Summary : The subject “An Introduction to Mathematics,” which is taught by the author, focuses on the phrase “sense of wonder” (i.e., the feeling of being amazed by mysteriousness and curiosity). It has been planned and put into practice based on the hypothesis (basic concept) that one’s feelings of weakness with respect to mathematics can be reduced by nurturing the senses (thereby increasing students’ interest in mathematics); further, one can learn willingly and increase one’s level of understanding. Given that the author has been continuously participating in educational research related to mathematics, the author has developed educational materials based on the results obtained from the research conducted by the author and has accumulated practices that are required for the introduction to mathematics for five years. Particularly, the basic concept for the development of educational materials has been mentioned in “Practice and Development of Educational Materials for [An Introduction to Mathematics] in Nurturing the Sense of Wonder (I)” (hereafter written as “Paper 1”) in “Research Bulletin No. 53 (2016 FY).” As the continuation of “Paper 1,” this article clarifies the devised perspectives and contents by mainly focusing on teaching methods and examines the basic concept of teaching methods as well as their outcomes and future issues. The first perspective of the method is to verify whether it is possible to nurture the “sense of wonder” by incorporating human dramas (episodes) of mathematicians relevant to the educational materials into mathematics. The second perspective is whether it is possible to nurture the “sense of wonder” using a topic that is connected to various events from historical and geographical perspectives. Further, the third perspective is whether it is possible to nurture the “sense of wonder” by incorporating “demonstrations as mathematical activities (specific operation and activity)”. During this examination, various specific teaching tools were established to ensure that the students feel that this demonstration is realistic. The objective of these specific teaching tools is to ensure that students can enjoy more number of activities. Based on the three perspectives that are devised for educational methods to nurture the “sense of wonder” and by considering students’ thoughts, this article clarifies the basic concepts for the introduction to mathematics and considers the 10th lecture, which is “Comparison of the Chocolate Sizes,” out of 15 lecture topics as an example and examines it.

抄録：筆者が本学で担当する「算数概論」という科目では、「センス・オブ・ワンダー」（神秘さや不思議さに目をはる感性）という言葉に着目し、そのような感性を育むことを目指せば、受講生の算数数学への興味・関心が高まるとともに、算数数学への苦手意識も和らぎ、意欲的に学ぶとともに理解も促進できるのではないかという仮説（基本的な考え方）に基づいて構想・実践してきている。筆者は、これまで算数数学にかかわる教育研究を継続してきているが、そこで得たものを基に、教材開発を行い、算数概論の実践を5年間、積み重ねてきた。特に教材開発の基本的な考え方に関しては、「研

究紀要第53号」(2016年度)で、「センス・オブ・ワンダーを育む『算数概論』の教材開発と実践(Ⅰ)」(以下、「論文Ⅰ」とする)として、述べたところである。本稿は、論文Ⅰの続編として、主に授業方法に視点をあて、工夫の観点や内容を明らかにし、授業方法における基本的な考え方、及びその成果と今後の課題について考察することにした。方法における観点の1つ目は、教材に関連する数学者等の人間ドラマ(エピソード)と算数数学を絡ませることで、いかに「センス・オブ・ワンダー」を育むことができるか。2つ目は、歴史的・地理的等の観点からの様々な事象とのかかわりを取り上げることで、いかに「センス・オブ・ワンダー」を育むことができるか。3つ目は「数学的活動としての実演」(具体的な操作・作業)を取り入れることによって、いかに「センス・オブ・ワンダー」を育むことができるかである。この間、実演をよりリアルに実感させるため、具体的な教具の製作も試みつつ、より活動の楽しさを実感させることを目指してきた。本稿は、以上の3つの「センス・オブ・ワンダー」を育む教育方法的な工夫の観点から、受講生の感想なども踏まえ、算数概論の基本的な考え方を明らかにしたものであり、全15回のうちの第10講「チョコの大きさ比べ」を、具体例として取り上げ、考察している。

キーワード：センス・オブ・ワンダー、算数概論

1. はじめに

筆者は本学において、2014年度～2018年度、「算数概論」(3年前期全15回)を担当した。初年度(2014年度)の反省を踏まえて、2015年度から受講生の算数数学への興味・関心を高め、意欲的に学べることを第一義に考え、その教材開発と授業方法の工夫・改善を図ってきた。2016度の講義終了後、「センス・オブ・ワンダーを育む『算数概論』の教材開発と実践(Ⅰ)」(論文Ⅰ)と題して、本科目の基本的な考え方と教材開発のあり方等を、研究紀要第53号(2016年度)(註1)に寄稿した。各講義の内容と教材開発の経緯やそのいくつかの実践例を紹介し、具体例として、第8講「不思議な木の生長」を取り上げ、基本的な考え方に基づく授業の実践について考察した。さらに、全15回の受講生の感想を分析し、算数概論全体の成果と課題も明らかにした。一方、授業方法に関しても、毎年度、反省を行い、工夫と改善を積み重ねてきたところであるが、その基本的な考え方をまとめるにはいたっていなかった。

これまでの実践で、受講生の講義全体を通しての次のような感想(註2)が得られたことから、一定の成果を実感している。

*算数数学はひたすら計算し、問題を解くことだと思っていたけれど面白いことがたくさんあって奥が深いと思いました。(TK)

*算数数学への苦手意識が大きかったけれどしだいに楽しい

ものに感じることができました。(KK)

*数学はきまりきったことばかりと思っていたけれど不思議なことがいっぱいあるのだと分かりました。(SH)等々

論文Ⅰでは、本講義によって、受講生の算数数学へのイメージがある程度変容が図れたこと、そして、さらなる授業方法の工夫・改善と新しい教材開発が課題であること等について考察したところである。本稿では、論文Ⅰの今後の課題として掲げた「授業方法の工夫」について、その観点を明らかにして、受講生の感想を分析しながら、具体例を通して考察することにする。

2. 「算数概論」の基本的な考え方

論文Ⅰで述べた内容を、次の2点にまとめることができる。

- ① 「算数概論」では、「センス・オブ・ワンダー」を育むという視点で目標、内容を構想し、実践することによって、講義への興味・関心を高め、学習意欲を喚起し、算数数学への苦手意識の転換を図ることを目指す。
- ② 「センス・オブ・ワンダー」を育むための「算数概論」の教材開発の視点を、筆者のこれまでの教育研究と実践経験を踏まえ、次の3点にまとめることができた。(註3)

視点A 自然界の現象と算数数学が関連付く場

視点B 「素直な感覚」と算数数学の事実がずれる場

視点C 算数数学に関わる人の歩みと算数数学との
関わり場

3. 「センス・オブ・ワンダー」を育む 算数概論の授業方法の工夫の観点

(1) 3つの工夫の観点

「センス・オブ・ワンダー」を育む教材を開発し、全15回を構成して、シラバスを組み立てた。そのタイトルと取り扱う数学の内容、教材開発の主な視点(ABC)の一覧表を、論文Ⅰの表1「全15回のタイトル一覧表」で示すことができた。

さらに、実際の授業では、その進め方を毎回、工夫・改善してきたところである。

- 工夫してきたことは、
- ・パワーポイントで提示する場面の表現を工夫し、映像効果を活かすこと。
- ・問題を基本問題・発展問題・関連問題などに分けて、

その与え方や時間配分を随時工夫すること。

- ・講義の終盤で「センス・オブ・ワンダー」を意識させるような着眼点を明示するなどして感想をまとめさせること。

等である。さらに、これまでの全15回の講義を振り返って、内容と関連させながら、授業方法として工夫した観点を整理すると、次の3点にまとめることができた。

以下、3点を、次のような「観点X・Y・Z」とする。

観点X 関連する数学者等の人間ドラマ(エピソード)を絡ませる。(人物の観点)

観点Y 歴史的・地理的等の事象の視点からの関連する話題を取り上げる。(事象の観点)

観点Z 実感的な理解を図る数学的活動としての「実演」(註4)を取り入れる。(実演の観点)

各回にどのような具体的な内容を取り入れ、工夫したかを一覧表にまとめると、次のようになった。

(表1) 全15回のタイトルと観点X・Y・Zの内容(註5)

タイトル	人物の観点X	事象の観点Y	実演の観点Z
① 数の占い		ラッキー10占い	偶奇性の占い実演
② 天才少年ガウス	数学者ガウス	ガウスの少年時代	図による等差数列の和
③ 一休さんが寒い?		インド九九	アレイ図計算の仕組み
④ お得なピザは?	数学者アルキメデス	円周率の話題	アリの運動場の実演
⑤ 日食ハンター	宇宙飛行士毛利衛	皆既日食の現象	日食シミュレーション
⑥ ケーニヒスベルクの街	数学者オイラー	街の7つの橋の話題	紐と輪による実演
⑦ 楽しい図形遊び	数学者メビウス	タングラムの発祥	紙パックから正四面体
⑧ 不思議な木の生長	数学者フィボナッチ	樺の木の枝分かれ	渦巻図の描画実演
⑨ ピタゴラスの発見	数学者ピタゴラス	蜂の巣の六角形の謎	蜂の巣の面積の実験
⑩ チョコの大きさ比べ	数学者アルキメデス	アルキメデスの墓標	実物の体積の求積
⑪ 筆算をひろめた男	数学者福田理軒	江戸の数学塾	鶴亀カードの活用
⑫ 博士の愛した数式	小説家小川洋子	素数ゼミの謎	エラトステネスの篩
⑬ 星描き名人	授業者 小西豊文	世界国旗と星形伝説	円の中に実際に描く
⑭ 世界は消滅するのか?	エドワード・リュカ	ハノイの塔の伝説	ハノイの塔の操作
⑮ 電卓を使って		数字キーの配列	電卓マジック

(2) 「人物の観点 X」で取り上げた人物例

例えば、第 2 講「天才少年ガウス」では、数学者ガウスの紹介から始めた。次のようなガウスのエピソードを紹介し、少年のころのある場面 (図 1) から興味・関心を高めた。



(図 1) ガウスが少年の頃の教室のある風景

数学者ガウスは、ドイツの数学者で、父は煉瓦職人であること。ガウスが数学の天才であったことを思い起こさせるような言葉「私は言葉を話す前から計算をしていた」やガウスの先生の言葉「このような天才に私が教えられることは何もない」等を紹介した。

そして、少年の頃のエピソードとして、先生が「1 から 100 までの数の合計を計算しなさい」と言ったすぐにガウス少年は「できました」と言ったというのである。一体、どうして計算したのか? というところに疑問を感じさせ、本テーマに関心を抱かせる。受講生はこの少年が、のちに偉大な数学者になったというところに感動する。また、その先生はお茶を一杯飲むために少し休憩時間をとったからという理由にも触れるとなんともユーモラスな側面を感じることができる。そして、少年ガウスの計算の方法こそが、本講義のテーマである「等差数列の和を求める方法」そのものである。この人物 (ガウス) のエピソードが、本テーマの講義の導入として、関心・意欲を高める原動力になったと考えられる。受講生は、次のような感想を述べている。

* 先生が 1 から 100 までの和を求めなさいと言ったとき、すぐにできましたと言ったガウスは、覚えていたのか? どうして計算したのかが知りたくなりました。こんな能力があつて偉大な数学者になれたと思います。(MI)

* ガウスがどのようにして、こんなに早く計算できたのかを考えていくと、私自身が新しい発見をしたような気持ちになりました。(KN)

* ガウスが自分のクラスに居たら人気者になっていたと思うし、数学を教えてほしいなと思ったりして、何だか私も物語の中に入ったみたいで楽しかった。(AM)

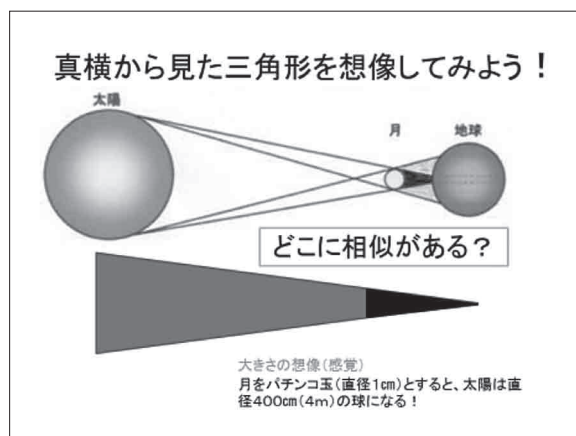
* ガウスの話で、私は、求め方できっといい方法があるのではと勤が働きました。少なからず、私にも数学脳があるのかなと思いました。(YU)

ガウスの登場は、これから学習する本講義の内容を考える直接的な動機になった。また、人物がいる場面に自分を置いて想像し、学習の中に自然に入り込んでいったようである。さらに、このガウスが考え付いた計算方法のアイデアに感嘆することによって、数学の不思議さ・面白さを感じることできたと考えられる。人物 (数学者ガウス) が数学の内容に絡んで受講生の学習意欲を向上させたといえる。

この他の講義でも、表 1 の一覧表の「人物の観点 X」に示したような人物を取り上げた。人物は主に内容に関連する数学者が多いが、時には内容に関連のある宇宙飛行士「毛利衛氏」(註 6) や、現代の小説家「小川洋子氏」(註 7) 等も登場させている。これらの人物のエピソードを絡ませることによって、「センス・オブ・ワンダー」を、より一層育み、豊かにする効果があったと考えられる。

(3) 「事象の観点 Y」で取り上げた事象例

例えば、第 5 講「日食ハンター」では、「皆既日食」という事象について取り上げ、その概要 (図 2) をつかませることから、講義を始めた。



(図 2) 皆既日食の仕組み

その仕組みに潜む相似の見方を取り上げ、本講義のテーマ「相似」について学習を進めた。さらに、不思議な現象である皆既日食のしくみが、まだ十分解明 (説明) されていない時代には、神の仕業と考えられ、そ

のことが日本の神話として残っているという事例とその神話（事象）の概要についても紹介した。（図3）

神話 こんな神話が残っています。

スサノオの尊とその姉アマテラスのお話です。スサノオは乱暴者で、暴れ放題でした。あるとき、スサノオは、屋根の上から死んだ馬の皮を投げつけました。怒って、アマテラスは天の岩戸に引きこもってしまったのです。太陽の神アマテラスが隠れて、天も地も真っ暗になってしまいました。困った神たちは、お祭り騒ぎをして、アマテラスがそっと覗いたすきまに手を入れて天の岩戸を開けたのでした。それで、世の中に光が戻ったというお話です。（それは皆既日食のことだったと言われてます）

（図3）天の岩戸の神話の話

その後、皆既日食という現象は、今でも受講生や一般の人々にとって、不思議で神秘的な事象であると考えられるが、しだいに時代とともに明らかにされてきたという科学の進歩を実感させ、まだまだ解明されていない宇宙の謎への興味を感じさせることができたと思われる。また、その皆既日食の仕組みが相似の見方で説明できたことに驚き、「センス・オブ・ワンダー」を、より一層育み、豊かにする効果があったと考えられる。受講生は、次のような感想を述べている。

- * 皆既日食の現象が相似につながるとは思ってもみませんでした。皆既日食という興味のわくような話から、相似の話がはじまるとそれに置き換えて考えるから分かり易くなると思いました。リアルに考えられて楽しかったです。（TK）
- * 月が太陽に重なれば、皆既日食ができると思っていたけれど、距離や大きさの比がそろわないと見られないと分かり、相似への興味が湧きました。（AI）
- * 皆既日食は謎ですが、それをめぐって神話が誕生したと聞いて、うきうきして楽しかったです。算数の世界は広いです。（IY）
- * 比は比、図形は図形、皆既日食は理科分野というようにそれぞれ単体で習ってきた私たちは、すごく損している気持ちになります。日常のことも、数学的な目線でアプローチできることが分かりました。（MH）

皆既日食の原理を相似の見方で説明することで、数学がある事象とつながるところに面白さを見出したようである。このように事象と数学のつながりを取り上げることは、数学の有用性を感じさせ、学びの面白さを実感することができる。また、いろいろな事象に数学的な目線でアプローチできることに不思議さを感じ

じ、皆既日食と相似が結びつき、感性を育むことにつながったと考えられる。

この他の講義では、一覧表の「事象の観点Y」に示したような事象を取り上げている。「ケーニヒスベルグの街の話題」、ハノイの塔のパズルを考案した人が、同時に提唱した「地球消滅の予言伝説」などがある。このような事象を取り上げ、歴史的・地理的な事象との結びつきを感じさせることで、より一層、数学への興味・関心を高めることができる。

（4）「実演の観点Z」で取り入れた実演例

例えば、第6講「ケーニヒスベルクの街」では、数学としての一筆描きがテーマで、一筆描きができる場合について、一般的にはオイラーのきまりで判断し説明させたりする。しかし、小中の算数数学でも取り扱われる題材でもあるが、そのきまりで、なぜ判断できるのかという納得する説明が示されないことが多い。

ケーニヒスベルグの街の模型



（図4）ケーニヒスベルクの街の模型（註8）

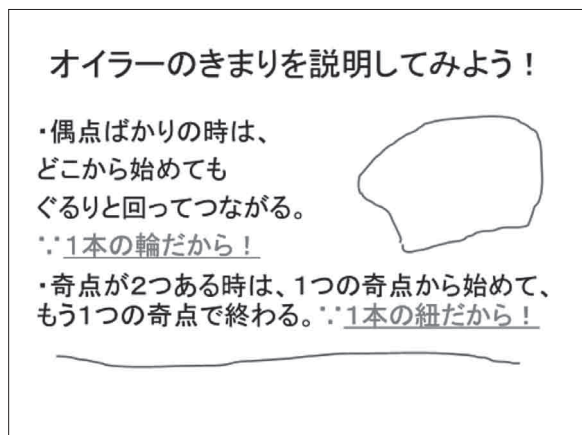
ここでは、具体的な1本の紐と1本の輪で形を作ることによって、実感として納得できる理解を図るような実演を取り入れた。つまり、一筆描きができる場合は、

i 奇点が2つであとは偶点の場合

ii 奇点がなくすべて偶点の場合

の2つである。このiは、具体的な1本の紐を使った場合、1本の紐で表すことができ、奇点はその紐の両端ということになる。一方iiでは、奇点がないということは1本の紐が輪になった状態であるということである。実際の図で、1本の紐で図を作ったり、1本の輪で図を作ったりすることで、オイラーのきまりが、実感として納得できるのである。（図5）このことに関連して、安野（註9）は「すぐくもつれた糸でも1本の糸であることが認められるように、そのつながっているか、切れているか、という最も単純なところに数学

の原理を求める考え方を、いつか、子どもにつかみとらせたいものだと思います。」と述べている。筆者も同感である。受講生は、次のような感想を述べている。



(図 5) 1 本の紐と 1 本の輪による説明

- * オイラーのきまりが不思議でした。なぜ、一筆描きのでき、できないが調べられるのか？そのわけが 1 本の紐と 1 本の輪を考えることによって、理解でき、すごく感動しました。(MH)
- * 1 本の紐と 1 本の輪の実演をすると分かり易くて、「できた」「わかった」というひらめきの感情が生まれました。そして、「そういうことか」と納得できました。(SM)
- * 1 本の紐だと、端から端までが一筆描きになって、紐の両端が奇点になるから、奇点から始まって、奇点で終わらないと描けないということがよく分かりました。これで、一筆描きの問題も作れると思いました。(SS)
- * 1 本の紐と 1 本の輪で説明できることをオイラーも発見していたのですか？小西先生が発見したのですか？この方法を小学生の時に、教えてほしかったと思いました。(MH)

この他の講義では、一覧表の「実演の観点 Z」に示したような実演を取り入れている。

例えば、「牛乳キャップと円の切り抜き図形を使った皆既日食のシミュレーション実体験」、鶴亀算の数の変化をとらえさせる「鶴亀カードの裏返し操作」、また、論文 I でも述べた、教具を使った「アリの運動場の距離の紐による実証実験」(註 10)、等のような実演では、実演そのものに驚きと不思議さの発見があり、あらためて実感として理解できたし、納得が得られ、感動することができる。実演が「センス・オブ・ワンダー」を、より一層、豊かにする効果があったと考えている。

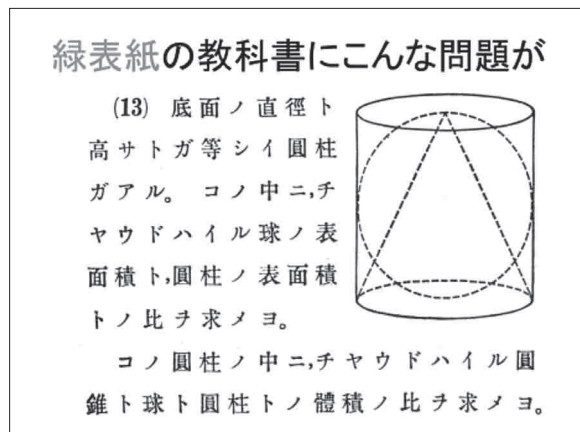
4. 授業の実例

実例として、第 10 講「チョコの大きさ比べ」を

取り上げ、講義の流れの概要と受講生の感想等について考察する。

(1) 教材開発の経緯

①「緑表紙の算数教科書」のある問題との出会いから
「緑表紙の算数教科書」(註 11)の次のような問題(図 6)との出会いから、本教材の構想を思いついたのである。



(図 6) 緑表紙の問題 (6 年下 p75)

3 つの立体の見取り図を重ね合わせた奇妙な図を示して、円錐・球・円柱の体積や表面積の比較を問題にしている。この問題では、その 3 つの体積の比や 2 つの表面積の比が簡単な整数比になることを示唆し、それらを求めて確かめさせようとしている。筆者のこれまでの経験では、立体の体積等の学習では、各立体の体積を求めたり、表面積を求めたりすることに終始し、それらの体積の間の関連(比など)を追究したことはほとんどなく、新鮮な問題と感じられたのである。多分、受講生にもその不思議さを感じさせることができると考えた。

さらに、緑表紙の教科書の教師用解説書では、本問題について次のように記述されていることに着目した。(註 12)

「かように、円柱とこれに内接する球の表面積の比が、極めて簡単な整数の比になるということは、まことに面白いことであると感じるように導くべきである。」さらに「これ等の比が、最も簡単な整数の比になること、特に球と円柱との体積の比が、表面積の比と等しいということは、不思議なことに思われるであろう。かような点に驚異を感じさせることは、自然に対し、又、数理に対しあこがれをもたせることに役立つであろう。」(傍線筆者)

この解説書の記述から、緑表紙がこの問題を取り上げた意図が分かると同時に、筆者の目指す「センス・

オブ・ワンダー」を育み、豊かにするという趣旨と同じであることに改めて意を強くし、教材として適切であると考えたのである。

②アルキメデスのエピソードから

アルキメデスという有名な科学者の次のようなエピソードが、いつ知ったのか定かではないが筆者の頭の中に記憶が存在していた。その1つは、アルキメデスは、王様から王冠の金の成分調べの命を受けて、調べる方法をお風呂でひらめき、思わず全裸で街中をかけたという話である。もう1つは、ローマ軍との戦（シラクサの戦い）において、アルキメデスが地面に図を描いて研究に熱中する中で、侵入してきた敵に対して「私の図を踏むな」と言って殺されたということである。そして、敵将が、偉大な科学者アルキメデスの死を悼み、墓標の図が、円柱の中に内接する球が描かれた図となったということである。先の緑表紙の問題に出てきている図に、まさにアルキメデスの墓標の図が含まれていると分かり、筆者の中で、緑表紙の問題とアルキメデスの墓標の両者が結びついた。緑表紙の問題にはアルキメデスは全く登場しないが、当時の緑表紙の著者は、アルキメデスの墓標伝説も意識して、本問題が作られたのであろうと推察することができる。アルキメデスが最も好んだということから、法則「球と円柱の体積比と表面積比がどちらも2:3で同じになること」の不思議さ（価値）を伺い知ることができる。アルキメデスの人物像やエピソードと絡ませて緑表紙の問題を教材として取り扱うことにしたのである。緑表紙の問題に、アルキメデスという人物の観点を絡ませて、円錐・球・円柱の体積等を取り扱うことで「センス・オブ・ワンダー」を育むことができる教材になると考え、本講義の内容を構成した。

(2) 授業の実際

授業の流れを振り返り、受講生が「センス・オブ・ワンダー」を感じていると思われる感想の一部（抜粋）も取り上げながら、その成果を考察する。

PSとは「パワーポイントの画面シート」の略称であり、番号（1～24）は提示順である。

① 円錐・球・円柱の体積を比較する問題場面に出会う。

PS1 円錐・球・円柱の見取り図を重ねた図（緑表紙の問題に示されている図）を示し、本講義の考察対象を知る。

PS2 重なりのある見取り図の中に見える3つの立体、円錐・球・円柱の形を描く線をなぞり各立体の存在を明らかにする。そのために、重なり合った見取り図を3つ用意し、円錐の見取り図、球の見取り図、円柱の見取り図が、それぞれ浮き出るようになぞらせた。（実演）略

PS3 3つの立体のサイズ（数値）を示した。

円錐 底面の円の半径 10cm 高さ 10cm

球 半径 10cm

円柱 底面の円の半径 10cm 高さ 10cm

PS4 各立体の木の模型（図7）を提示し、次のような問題場面を設定した。

「円錐の形・球の形・円柱の形の形をした3つのチョコがあります。それぞれ、底面、高さのサイズは等しいです。兄はこの円柱のチョコをとり、後の2つのチョコ（円錐と球）を妹にあげました。2人のチョコはどちらが大きいのでしょうか？」



（図7）3つの立体模型の写真

・まず、模型を見て、直感的に体積の大小を予想した。受講生に挙手で反応させたところ、兄（円柱）が大きいと少しで、妹が大きい（円錐と球）と考えた受講生がほとんどで、その他の考えをした受講生はいなかった。

② 円錐・球・円柱の体積や表面積を求めて比較する。

PS5 体積を求める前に求積公式を復習する。（言葉の式）

PS6 立体の体積を求める公式を復習する。（文字の式）

$$\text{円錐} = \frac{1}{3} S h$$

$$\text{球} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\text{円柱} = S h$$

○ S は底面積、h は高さ、r は半径、 π は円周率
・ 小学校 6 年～中学校 1 年にかけて学習している基礎的事項 (公式等) の復習を行い、想起させる。

[PS7] 次のように 3 つの立体の体積を求めて、比較する。
・ 体積を求める式より

$$\text{円錐} = 5 \times 5 \times \pi \times \frac{1}{3}$$

$$\text{球} = \frac{4}{3} \times \pi \times 5 \times 5 \times 5$$

$$\text{円柱} = 5 \times 5 \times \pi \times 10$$

[PS8] 3 つの立体の体積を求めて、通分してみると、その比が 1:2:3 になっていることが分かる。

・ 分母 3 で通分した数値

$$\text{円錐} = \frac{250\pi}{3}$$

$$\text{球} = \frac{500\pi}{3}$$

$$\text{円柱} = \frac{750\pi}{3}$$

・ ここで、感覚的にとらえた 3 つの立体の大きさの比較とはずれたものになっていることに驚きを感じるとともに、兄の円柱 1 つと妹の円錐と球 2 つ分が同じ体積になることを知る。

[PS9] 兄は妹にたくさん分けたようなふりをしているが、実は同じであったことに面白さと不思議さを感じる。

受講生は次のような感想を述べている。

* 見た目は全然、違うのに、円錐と球を合わせて、円柱になるのが不思議です。錯覚のような気分です。(TK)

* 粘土で作って確かめたいと思いました。円錐と球をぴったり円柱にはめてみたいです。(SH)

* 兄と妹、チョコの話が分かり易いです。見た目で判断したけど、案外、量は分からないものです。講義の途中で同じかも知れないという目線がもてるようになりました。しかも、こんなきれいな比に表せるなんて謎です。(AY)

[PS10] 「緑表紙の算数教科書」の次のような問題があることを紹介する。(図 6) ここでは、体積とともに、球と円柱の表面積の比較も行っていることも知る。

[PS11] この問題で使われている昔の漢字にもふれる。(略)

[PS12] 問題にある球と円柱の表面積についても、公式を想起し求める。

$$\text{球の表面積} = 100\pi$$

$$\text{円柱の表面積} = 150\pi \text{ (底面積 2 つと側面積)}$$

・ 表面積についても、球と円柱の面積の比が 2:3 に

なっており、これは体積の比と同じであることに気づく。球と円柱については、表面積、体積ともに 2:3 になっていることに不思議さを感じる。受講生は次のような感想を述べている。

* 円錐と円柱が 1:3 になるのは分かるけど、そこに球を入れて、1:2:3 になるなんて、すごく美しいきまりと思いました。(KI)

* 今まで、公式を習ってきたけど、関連付けることはありませんでした。球の体積の公式は「みのうえにしんばいあるさんじょう」と覚えて使うだけでした。球と円柱は、表面積も 2:3 になっているのに驚きました。昔の算数教科書でこんな難しいことを小学生がやっていたとはびっくりです。(KU)

* 円錐の表面積も、体積の比と同じだったら面白いのと思いました。また、なぜ、円錐はそうならないのかが逆に不思議です。必ずしも体積と表面積の比は、同じではないですよ。球と円柱が異質で奇跡ととらえる方がいいのでしょうか。数学は思わぬところにつながりがあって不思議です。(SS)

③ アルキメデスの人物像やエピソードを知る。

[PS13] この不思議な現象をいち早く発見し着目していたアルキメデスの存在を知らせる。

[PS14] アルキメデスのエピソード (1) を挿絵で知る。
挿絵 I 王様から依頼された王冠の成分が純金かどうかを確かめる方法をお風呂に入っているときに思いつき、全裸のままで街中を走り回ったという話の想像図 (略)

[PS15] エピソード (1) の話の概略を知る。

[PS16] アルキメデスのエピソード (2) を挿絵で知る。
挿絵 II ローマ軍との戦争で、アルキメデスが最期の時を迎えた際にも研究に没頭していて殺されたという場面の想像図 (略)

[PS17] エピソード (2) の話の概略を知る。

・ アルキメデスが最も気に入っていた「球と円柱が、その表面積も体積も 2:3 になっていること」をもとに、その墓標が円柱の中に球があるような絵だったことを知る。アルキメデスがこのきまりになみなみならぬ関心をもち、当時、最も気に入って研究していたというほどに神秘的で不思議な現象であることに気づく。

受講生は次のような感想を述べている。

* アルキメデスが、この 2:3 のきまりをすごく気に入っていたのでしょう。それは、よほど不思議だったということですね。体積と面積が関連するわけが分かりません。だっ

て、公式は全然違うのですから。(NM)

*アルキメデスのエピソードで、ほっこりしました。数学者や数学が身近に感じられます。それに、最後にあんな言葉を言うなんて信じられません。

*アルキメデスは、考えているときはわれを忘れて集中するタイプです。だからこそ偉大な科学者になれたのだと思います。(TO)

*アルキメデスが手描きで地面に描いていた絵を見てみたい。恐怖で死ぬより、いいなと思える死に方だった。堂々としているアルキメデスがカッコいい。(SD)

④ 基本問題や発展問題に取り組む。

PS18 基本問題 (1) 立体の体積を求める問題 (略)

PS19 基本問題 (1) の解答 (略)

PS20 基本問題 (2) 四角錐の体積を求める問題 (略)

PS21 基本問題 (2) の解答 (略)

PS22 「センス・オブ・ワンダー」を意識させる着眼点を明示する。

PS23 発展問題 円錐の体積を求める問題 (略) (註 13)

PS24 発展問題の解答

以上で講義を終える。(註 14)

偉大な科学者アルキメデスが最も気に入っていた 2:3 のきまりが、墓標にまでなっているという事象を絡ませることにより、その体積の比が 1:2:3 (円錐と球と円柱) であることや表面積と体積の比 (球と円柱) がともに 2:3 で等しいことなどがいかに不思議なことであったのかを、より一層感じさせることができたと考える。戦の最中まで、考え続けていたことは何か、それはアルキメデスが球と円柱の体積比と表面積比がどちらも 2:3 で一致することがとても気に入っていたということから、多分、そのことを考えていたのではないかと筆者は想像してしまうのである。偉大な科学者であるアルキメデスがそこまで気にしていたというこの数学的な事実に「センス・オブ・ワンダー」を大いに感じられるであろう。このように人物の観点を絡ませることは、数学的現象の不思議さを増幅させ、「センス・オブ・ワンダー」をより一層育み、豊かにすると考えられる。

5. 「算数概論」の成果と今後の課題

(1) 成果

全 15 回の講義を通して、3 つの観点「人物の観点 X」「事象の観点 Y」「実演の観点 Z」で取り扱った内容を整理し、「センス・オブ・ワンダー」をより一層育み、

豊かにすることができる要素について、受講生の感想を中心に考察した。それぞれの観点は、受講生の興味・関心を高め算数数学への苦手意識を和らげるとともに、算数数学へのイメージを転換することができたと考える。さらに、それらが、数学的な内容の理解の促進にも作用し、楽しく学習できたと考えている。

人物の観点では、その人物像やエピソードに親近感や憧れを感じたり、その人の人生のストーリーの中に自分を置いたりして、数学的な内容が自分の中楽しく入り込んでいく様子がとらえられた。

事象の観点では、地理的な要素、歴史的な要素、それぞれの時代の生活や文化的な背景を感じ、特に、数学の有用性を感じて役に立つという実感を得たようである。受講生は、数学は形式的処理が主という狭い範囲で考えていたが、身のまわりの事象と密接につながっているということに気づくことによって、数学の世界を外に大きく広げられたように感じられる。

実演の観点では、描いたり操作したり実物で確かめたりすることで、確かな理解と共に納得感を得ることができたようである。「そういうことだったのか」と実際の実演で納得すること自体に「センス・オブ・ワンダー」が存在するといえるだろう。

以上のように、授業方法の工夫・改善の観点を 3 点設定し、その観点で、講義内容を構成し、実践することで、一定の成果が得られたと考えている。

最後に、本学で実施している授業評価のアンケート (註 15) の集計結果に次のような感想が書かれてあったことは、この上ない喜びであった。

「すごく楽しかったし、面白かった。算数の面白さと思議さをたくさん学ぶことができました。まるで、小学生に戻ったかのようにわくわくして算数と向き合えました。勉強が嫌いな子、算数が苦手な子でも楽しめる授業でした。大満足です」

(2) 今後の課題

今後の課題としては、パワーポイントでの提示場面の表現をさらに工夫し、興味・関心を高めるものにする。例えば、動的な画像をもっと取り入れたりできるよう、筆者自身の表現技術を高めることが必要である。また、教材に関する資料や調査研究もまだまだ不足している。例えば、アルキメデスの墓標の実物写真など見せたかったが、まだ、想像図すら調べることができていない。また、教具については、業者に作製依頼し、いくつかでき上がっているが、全体としては不十分である。実践例の 3 つの

立体の体積比を確かめる場面で、比が1:2:3になる事実を、実演の観点から、粘土や水で実証したかったが、その教具をうまく用意するに至らなかったことは残念である。例えば、右の(図8)のような砂時計(註16)を実際に用意できて、確かめることができればその感動は倍化したであろう。今後、そのような適切な教具の開発を続けたい。



(図8) アルキメデスの砂時計

全15回分の講義内容(シラバス)の構成は現時点でベストと考えているが、さらなる新教材の開発の余地が多々あり、今後、さらに教材開発と授業方法の工夫・改善を進めていきたいと考えている。

謝辞：本研究をはじめ、算数数学教育全般にわたり、これまでご指導賜りました 故 船越俊介先生(神戸大学名誉教授・元甲南女子大学教授)に心より深く感謝申し上げます。

註

- 1 甲南女子大学研究紀要人間科学編第53号(2016年)のp73～p82に「論文Ⅰ」は掲載されている。
- 2 論文Ⅰの研究の成果で紹介した感想例である。なお、以下、本稿では受講生の感想に*をつけ、個々の受講生をイニシャルで表すことにする。
- 3 論文Ⅰのp75～p76の具体例を参照されたい。
- 4 実演に関連する教具の開発・製作も一部行った。
- 5 論文Ⅰの一覧表から2018年度は講義の順序を少し変更した。
- 6 「日食ハンター」で毛利衛氏は、学生の頃に皆既日食を追い、観察した経験が基になって宇宙飛行士になったと述べている。
- 7 小川洋子氏は、小説「博士の愛した数式」の作者で、素数や完全数など数学の内容が中心の小説であり、ベストセラーになった。
- 8 ケーニヒスベルクの街の臨場感を感じさせるための木の模型教具を作製した。
- 9 安野光雅「はじめてであう すうがくの絵本」のp99で述べられている。

10 論文Ⅰのp75で述べている。

11 緑表紙の教科書とは、昭和10年から15年まで毎年1学年ずつ出版された「尋常小算術」という国定教科書である。表紙が緑色であったのでそうよばれた。1979年、振興出版社啓林館より復刻版が出版された。さらに、2007年、教師用解説書付きで再び出版された。

12 緑表紙教科書「教師用解説書」のp199で述べられている。

13 講義の連続性を考慮し、発展問題では前時の「ピタゴラスの発見」で学習した三平方の定理を活用させるために「高さでなく母線が分かっている円錐の体積を求める問題」にしている。

14 講義終了後に提示したPS(毎回全24枚)は、研究室前に置いておき、講義を振り返るように配慮した。

15 全講義終了後に、受講生に課す「授業評価のアンケート」のことで、その自由記述欄に書かれていたものである。

16 アルキメデスの砂時計は「数学の歴史物語」のp98で紹介されている。業者に作製依頼し出来上がってきた(写真)が本講義には間に合わなかった。

【参考文献】

- レイチェル・カーソン 訳：上遠恵子、センス・オブ・ワンダー、新潮社、1996
- 小西豊文、算数でセンス・オブ・ワンダー、教育研究収録第8号、2000
- 小西豊文、子どもが飛びつく算数面白物語、明治図書、2003
- 小西豊文、みんなで楽しむ算数面白朝会、明治図書、2006
- Eclipseguide.net 編、皆既日食ハンターズガイド、INFAS パブリケーションズ、2008
- 楠山正雄、日本の神話と十大昔話、講談社学術文庫、1983
- 小川洋子、博士の愛した数式、新潮文庫、2005
- 大野栄一、目で見える数学の基礎 面積体積、東京図書、1995
- 安野光雅、はじめてであう すうがくの絵本、福音館書店、1982
- クリフォード・ピックオーバー 訳：根上生也 水原文、ビジュアル数学全史、岩波書店、2017
- ジョニー・ボール、訳：水谷淳、数学の歴史物語、2018
- 小西豊文、算数的活動の実践モデル、明治図書、2010
- 松宮哲夫、伝説の算数教科書 緑表紙、岩波書店、2007
- 丸山健夫、筆算をひろめた男、臨川書店、2015
- 尋常小算術 復刻版、啓林館、1970
- 尋常小算術 復刻版、教師用解説書、啓林館、2007
- 算数教科書「わくわく算数」6年、啓林館、2015