個点と連続

——古代ギリシアにおける「無限概念」に対する近代数学からの観照——

鹿間春一郎

はじめに

古代ギリシアの文化や文明は，現在の西洋ひいては全世界の文明の源流をなすものであり，従って近世あるいは近代の西欧文化のいろいろな精華は，おおよそその原始的な模型を古代ギリシアに求めることができると言えよう。数学の場合も同様であり，近代において飛躍的な発展を遂げた数学の諸部門も，多くはその根底や萌芽を古代ギリシアのそれに見出すことができる。現代の非ユークリッド幾何学や幾何学基礎論は明らかにユークリッドを起点とするものであり，近来隆盛をきわめた微積分学の諸分野も，アルキメデスやアポロニウスの研究の中にそのきざしがあったと見てよいであろう。その他の細部にわたってもそのような例は多く，思想の底流は不変であるという感を多くの人がもつであろう。しかしその反面，古代ギリシアはいまから二千数百年も昔のことであり，その数学思潮や自然学の中に，若干の矛盾や誤解が含まれていて，それが近代の数学や自然科学の照射を受けて，明らかにされることがあっても，それは当然のこととしなければならないのではないかと思われる。

古代ギリシアの数学や自然学の内蔵している誤謬と矛盾は，ひとしく「無

限」に関連しているもののようである。古代ギリシアの多くの天才や碩学たちも，古代という絶対的な条件のもとには「無限概念」のハードルはついに跳び超えることができなかったようである。言うまでもなく，対立する個点と連続の両概念は，また融合させねばならないものでもあり，そのことは人類に課せられた永遠の問題であって，若干の解明をなし得たと思っている現代人といえども，無限とかかわるこれらの概念にはいまだに躓きつづけているのだと考えねばならないであろう。

ピタゴラス一派は，自から確立した数論の基盤が自然数にあり，なおその比をとって生じる数を考えても有理数の枠を出ないものであるゆえに，別に自からの発見したピタゴラスの定理の，当然の帰結として生じる無理数との間に抵触が起った。そして彼等はこの自己撞着を解決できないで，長い間苦しんだようである。そしてまた一方，諸学の父とも万学の祖とも称されるアリストテレスも，幅広く底深い緻密な彼の学問の中に，伏流のように流れる連続の思想の拡張から生じる若干の誤りの故に,後世への大きな功績の中で,時にマイナスの影響を残す結果となった。

ピタゴラスは一生数学に徹した人であり，一方アリストテレスは彼の師プラトンとは異なり，その62年の生涯において数学を研究したこともなく，数学に対して具体的な貢献もない人である。数学にかかわる経歴において全く対称的なこの両者は，またその思想の底にあるモナド（Monad，単子）と連続という点でも，また対照的であると考えられる。この両者の対比は非常に興味深いものであり，これらをいま，近代を通過して来た数学の歴史の立場から論じてみたいと思う。

1．古代ギリシアの数学における無限概念

数学にかかわる者は，いずれ無限に遭遇しこれと対決しなければならない運命にある。論理性と厳密性においては，完成の域に達していると思える古代ギリシアの数学も，無限との対決においては三舎を避けた感が深い。これ

はどの数学者も手に余るものであったようで，この概念に挑み，苦しみ，回避し，また除外した。次にその二三の例をあげてみよう。

（a） ツェノン（Zenon B. C. 490－429）の逆理

有名な逆理「アキレスは亀に追いつけない」という命題の説明に，ツェノンは次のように弁じた。アキレスが亀に追いつくためには，現に亀のいる位置まで走らねばならず，それを走り終ったときには，同時間に亀は小量ではあるがさらに，前の位置に進んでいる。アキレスが第2の亀の位置に達したときには，亀はさらに小量の距離を前へ進んで第3の位置に達している。この様を無限にくり返えすのみで，ついにアキレスは亀に追いつくことができないとツェノンは言うのである。小量（無限小も含む）線分の無限大個数の和は有限であり得ない，と論じた所に間違いが生じた。このように無限を介在させてひねった分析を行なうことなく，すなおに旅人算で考えれば実情は簡単にわかることではあるが，いましばらく彼の分析的推輪に従って計算してみることにしよう。

いまアキレスと亀とのもとの距離をa，亀の速さがアキレスの速さのr（$0<r<1$）倍とすると，アキレスが亀の前位置までの距離（a）を走る間に，亀が走る距離はarである。次にアキレスがこのarを走る間に，亀の走る距離はar^2である。これを無限にくりかえすとして，アキレスは

$$a+ar+ar^2+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=\frac{a}{1-r}\ （有限）$$

また亀は

$$ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots\cdots\cdots=\frac{ar}{1-r}\ （有限）$$

だけ走って実際は追いつくことになる。そして，$\frac{a}{1-r}-\frac{ar}{1-r}=a$ はアキレスが亀に追いつくために亀より余分に走るべき距離である。

ツェノンの他の逆理に,「飛んでいる矢は的に達しない」というのがあるが，これも無限概念のひねり方は前者と同工異曲のものである。このように，明確にされていない無限の概念を推論の間に介在させ，一方的な論理を主張することによって世人を韜晦に導いたのである。無限の概念こそは，古代ギリ

シア数学のアキレス腱であった。

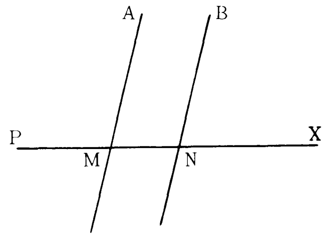
（b）　アルキメデス（Archimedes B. C 287－212）の公理

アルキメデス自身の表現とは異なるが，現在ふうに分かり易く言えば，「ひとつの数 a と他の大きな数Aがあり，a を2倍，3倍，………n 倍して，n をだんだん大きくして行けば，Aがどれほど大きくても，na がAを越えてさらに大きくなるようにすることができる」（アルキメデスの公理）というのである。一見理解しやすい道理であり，現在もこの考えを無限大の定義に用いているくらいであるから，当時の人たちの納得が得られ，その故に公理と称したのであるが，a が無限小となったとき，このような n が存在し得ない場合もあり得ることを，現在人は指適するであろう。この場合，結果的には無限の概念（a が限りなく0に近ずくケース）を回避し除外したことになっている。

（c）　ユークリッド幾何学における公理

本来厳密な無矛盾性を要求されるはずの「公理系」の基礎においてさえ，無限の概念が入ってくると，意外に脆弱な部分を含んでいることに気づくであろう。ユークリッド幾何学の中にその例を求めてみよう。

公理4，互いに相重なるものは相等しい。
公理5，全体は部分より大きい。



という2つの公理があるが，ここに無限を持ち込んでみよう。いま直線PXがあり，これと交わる平行な2直線AMとBNがあるとする。平面の部分AMXは平面の部分BNXと重ね合わすことができるから，AMX＝BNX　（公理4）　である。AMXはBNXと平面の部分AMNBとからできているから，BNXはAMXの部分である。すなわちAMX＞BNX　（公理5）　である。この2つのことははっきりと矛盾する。学問の典型といわれたユークリッド幾何

学も，無限に対してはこのように無力な部分もあるわけである。

（註）集合論において，自然数の集合の濃度は$\aleph_0$（可付番無限）であり，その真部分集合である奇数，偶数，7の倍数，素数等の集合の濃度も$\aleph_0$，また逆に自然数の集合をその真部分集合として含む有理数の集合の濃度もまた$\aleph_0$であることを思えば，「全体は部分より大きい」などということは，無限の世界では全く通用しないことである。

ギリシア数学の厳密性と無限概念

ピタゴラスからアポロニウスに至る三百数十年間は，ギリシア数学の黄金期と言えるが，この時期における数学の厳密さは，長い数学の歴史の中でも前後にその類を見ない著しいものであった。アーメスのパピルスがそのいい例であるように，ギリシア数学の黄金期に先行する古代のエジプトやバビロニアで行なわれていた数学は，論理の結合が不十分であり，従って証明もなく，ギリシア人から見れば殆んど数学とも言いがたい程の，実用性のみを重視したものであった。またこの時期の後に続く，ギリシア数学の衰退期といわれるアレキサンドリア後期においては，ギリシア的な厳密性がようやく褪色し，再び応用と実用とが重んじられる風潮が生ずるに至った。さらに後世，ニュートン（Newton, I, 1642－1727）とライプニッツ（Leibniz, G, W, 1646－1716）とによって微積分学が創始され，これをもとにして数多くの研究がなされた百数十年間は，世間の眼には数学的多収穫の時代と見られたけれども，その収穫が忙しいために，基礎的な部分がややゆるがせにされ，極限の概念等も雑駁なものであり，ギリシア的な厳密さを取りもどす余裕がないままに過したと評される。そして18世紀の終り頃から19世紀前半にかけて，再び深く数学の基礎を反省し，厳密さを取りもどしたとき，俄然近代数学の黄金時代を現出することができたのである。

そうした観点からすると，数学の厳密性を堅持し得たアテネ時代とそれに続く前期アレキサンドリア時代とは，数学の全歴史の中でむしろ特殊な短い時期であったと言えよう。そしてその理由が古代ギリシア人の特性によるものであるとか，イオニア学派の伝統によるものであるとかいう従来の説に

代って，卓見をもった少数の人たちがこの風潮をリードしたからであるという説（中村幸四郎，数学史）が近来有力である。

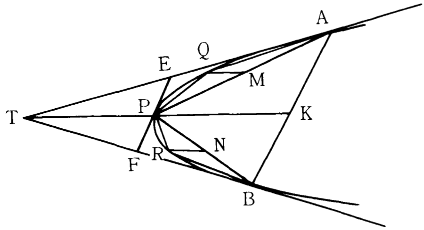
数学の中へ整然たる論理性と粛然たる厳密性を持ち込んだ第一の先覚者は，数学を専門とはしないが，多大の関心を示したプラトン（Platon, B. C. 429－347）であった。彼は遍歴時代にピタゴラス学派の人たちと密に接触し，かなりの数学を学びとり，帰国後はアカデミアの学園において数学を重視し，その数学への傾斜は彼の弟子アリストテレスの好む所ではなかったと伝えられるほどである。彼は哲学思考の方法を思惟するに当って，数学の方法にも論及し，公理・公準・無定義述語から出発し，さらに新たな定義を加えながら証明を重ねることにより，推論を重積して学体系を形成するという方法論を展開し，数学の外側から大いに数学に貢献するところがあった。

徹頭徹尾このプラトンの方法を用い，その時代までに蓄積された数学の内容を材料として壮大な体系を打ち立て，「原論」（τα στοικεια, ストイケイア）を後世に残したのはユークリッド（Euclid, B. C. 300年頃）であった。

数学における厳密さの衰退を，数学そのものの衰退として誹謗するのは必ずしも適当でないかも知れない。後期アレキサンドリア時代を代表すると目される，ヘロン（Heron, B. C. 100年頃）の測量術その他の実用数学が，ローマの大土木工事に役立ったことは事実であり，後世への別の大きな功績と言えよう。またニュートン以降ガウスに到る時期も，十分に多産であり，活発であり，有意義な時代であったと言える。ただ数学が厳密さを軽視し，実用にはしった風潮の中では，基本的な発見がなされることが少なかったという過去の事実は，数学の学問としての性格と宿命を暗示するものであろう。

簡単な問題においては，厳密さを十分保持しながら，無限概念に近接して具体的解決に成功した例も少しは見られる。アルキメデス（Arckimedes, B. C. 287－212）が「搾出法」によって放物線の弓形の面積を求めたのがそれである。

（註）放物線の弦を AB とし，AB の中点Kから放物線の軸に平行線を引き，$\overset{\frown}{AB}$ との交点をPとする。△ APB は直線図形でその面積は求めることができ，これを S_1 とする。AP，BP の中点をM，Nとし，M，Nを通り軸に平行な直線が，$\overset{\frown}{AP}$, $\overset{\frown}{BP}$ と交わる点をQ，Rとする。$\triangle AQP + \triangle BRP = \frac{1}{4} S_1$ となる。さらにこの手続きをすすめて，放物線の内側から搾出して行くことにより，弓形 APB の面積Sは，



$$S = S_1 + \frac{1}{4}S_1 + \frac{1}{4^2}S_1 + \frac{1}{4^3}S_1 + \cdots\cdots\cdots$$

という無限級数で求められることを知り，この無限級数の和は $\frac{4}{3}S_1$ となるから，$S = \frac{4}{3}S_1$ という有限確定の値を得た。

アルキメデスはさらにA，Bにおける放物線の接線の交点をTとし，またPにおける接線が AT，BT と交わる点をE，Fとし，さらに外側から搾出をつづけて

$\triangle ATB - \triangle ETF - \cdots\cdots\cdots$ の極限がSとなり，その計算の結果が前と全く同じ値 $\frac{4}{3}S_1$ となることを確認して作業を完了している。このように，内側からの搾出によって得た値は当然放物線の弓形の面積であると推測されるにもかかわらず，さらに外側からの搾出によって同一の値となることを確認するなどは，全くギリシア的な厳密さであると言い得よう。

これは比較的に簡単な問題であり，無限の概念を用いて成功した数少い例の一つであるが，このような厳密さを保ちながら，無限の概念を含む諸問題を幅広く解明することは，周辺の数学のレベルが向上してはじめてなし得る所であった。定木とコンパスのみを有限回用いるという作図の厳然たる制限が，自由な製図の進展を期待させなかったように，結果としてギリシア的な厳密さは，古代の段階では無限概念の解明に関する限りあまり力とならなかっただけでなく，場合によってはかえって重荷となり，足枷になったと考えられる。

2．ピタゴラスの矛盾

ピタゴラス（Pythagoras, B. C. 582－493）およびその一派の人たちは，彼等独特の数論を展開して整数論を創始し，後世の数学に多大の貢献をした。まず「奇数」「偶数」「素数」を定義し，それから「互に素なる数」を論じ，さらにすすんで「過剰数」「完全数」「不足数」「親和数」に論及し，さらに「三角数」「四角数」に到っている。

（註）(1) 自分自身をのぞくすべての約数の和がもとの数より小さい数を不足数（例，8，$1+2+4=7<8$），等しい数を完全数（例，6，28，$1+2+3=6$，$1+2+4+7+14=28$），大きい数を過剰数（例，12，$1+2+3+4+6=16>12$）という。また互に相手の数の約数の和となっている2数を親和数（例，220と284，$220=1+2+4+71+142$，$284=1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110$）という。

(2) 1，3，6，10，15，………のように，その個数の点を正三角形に配列し得る数を三角数といい，n番目の三角数$T_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$となる。また1，4，9，16, 25,………のように，その個数の点を正方形に配列し得る数を四角数といい，n番目の四角数$S_n=n^2$となる。

ピタゴラスのピタゴラス学派内における立場は，ほとんど教祖といってもいいほどであり，学派の中の人たちのすべての発見は彼に帰せられたので，それらの論議がどこまで彼自身の研究によるものなのか，はなはだ疑わしいと言われる。しかし彼等の数論を通観するとき，その数に対する関わり方が大へん個性的であり，著しい特徴をもっていることに気付くであろう。これはやはりばらばらの研究ではなく，少くとも統一した（たとえばピタゴラス自身の）意志の存在を感じさせる。「万物の根源は数である」などとも言い，その数に対するこだわり方はほとんどマニアに近いと言ってもいい程である。

その論ずる所の数の範囲は自然数に局限され，点を表わすモナド（monad, 単子，個点）を考え，それを数と対比させ，数の配列に関するさまざまな規則性と，さらに美をも追求している。これは彼ら一派の人たちが，直線や円

の線としての「連続性」に着目することなく，「個点」の集りでできており，線分を形成する点の個数は数多いとはいうものの，本来「数え切るべき」ものであるという基本的な考えの上に立っていたことと無関係ではない。例えば数珠は珠が連なってできているように，線は個点が集り連なってできていると考えたのである。直線は無限個数の，そして円周や線分は有限整数個の個点によって形成されていると考え，従って2倍の長さの線分は2倍の個数の個点でできていると考えたのは，当然の推論によるものであった。

そうしたピタゴラス学派の数論における主張と，自己撞着を起こすような事態が生じた。それは皮肉にも，彼等学派の最大の発見と見られる「ピタゴラスの定理」の当然の帰結として惹起されたものであった。その定理によると，「直角三角形において，直角をはさむ2辺をそれぞれ1辺とする正方形の面積の和は，斜辺を1辺とする正方形の面積にひとしい」というのであるから，直角をはさむ2辺を a, b, 斜辺を c とすると，$a^2+b^2=c^2$ と表現できる。ここで a, b, c は線分の長さを表わすものであるから，数え切ることのできる個点によって形成されており，$c:a$, $c:b$ などの値 $\frac{c}{a}$, $\frac{c}{b}$ は当然自然数の比（分数）で表わされるはずであると考えた。いま最も簡単な場合を例にとり，$a=b=1$ とすると，$1^2+1^2=c^2$，すなわち $c^2=2$，現在の表現でいえば，$c=\sqrt{2}$（古代ギリシアでは負の数は考えられなかったので，$c=-\sqrt{2}$ は論外とする）となり，$\frac{c}{a}=\frac{c}{b}=\sqrt{2}$ ということになる。この直角三角形の斜辺も数え切るべき数の個点によって形成されているのであるから，$c=\sqrt{2}=\frac{p}{q}$（p, q はともに正の整数）の形で表現できるはずである。この期待に誘導されて，ピタゴラス学派の人たちは必死に追求したのであろうが，この $\sqrt{2}$ という値の分数表現はついにできなくて，むしろ $\sqrt{2}$ は整数比で表現できない数ではないかとの考えが生じ，その証明の方が成功した。

（註）$\sqrt{2}$ が整数比で表わされる数（有理数）でないことは次のようにして証明される。

$\sqrt{2}=\frac{p}{q}$（p, q はともに正の整数で，p と q とは互に素）と表わされるも

のと仮定する $p=\sqrt{2}\,q$，両辺を平方して $p^2=2q^2$，従って q^2 は2の倍数である。もし p が2の倍数でないならば，p^2 が2の倍数になるはずがない。だから p は2の倍数でなければならない。そこで $p=2p'$（p' は正の整数）と書くことができる。これを上の式に代入すると，$(2p')^2=2q^2$，$q^2=2p'^2$ となり，同様の論議により q も2の倍数でなければならない。すなわち $q=2q'$（q' は正の整数）と書き表わすことができる。これは，p と q が2という公約数をもつことであり，p と q とは互い素であるとした出発点の仮定と矛盾する。このことは「$\sqrt{2}$ が整数比で表わされる」とした仮定が誤まっていたので，結論として $\sqrt{2}$ は整数比で表わすことのできない数である。

この証明ができたために，整数と整数の比で表現することのできないこの $\sqrt{2}$ などの平方根数こそは，学派の基本的な考え方をくつがえす“不吉な”数となった。そしてこれら整数比で表わすことのできない数（無理数）のことは，「口にすべからざる（$\alpha\lambda o\gamma o\nu$）数」として外部への他言を禁じた。こうしてピタゴラス学派は，数論における自己撞着と，公明なるべき学問の世界で，他言を禁ずるなどという矛盾を内蔵することになった。

しかし今にして思えば，彼等一派にとってとるべき正しい態度は，不吉な数の存在を外部への他言を禁ずるなどということではなく，自からの数観を反省し，無理数を認知してこれを有理数と同様に取り扱い，さらに個点を含む連続の思想を導入することであった。

そのためには無限についてのより高い見通しが要求され，それは紀元前数世紀のピタゴラス学派には無理なことであったと思われる。

3．アリストテレスの誤謬

経験と観察とを重視し，さらに実験をも取り入れ，現実に起こる諸現象を立脚点として展開されたアリストテレスの諸科学は，当時において多くの精華を現出しただけでなく，さらに後世彼の学問が起点となって大きく進展する素地を作った。彼の師プラトンが「イデア（idea)」の奥に物質世界の諸現象を埋没させたのに対して，彼の設立した「形相」と「質料」の定式は，

物質世界を表に出し，その法則性の中で研究をすすめるのに好都合であった。彼の学問上の功績を列挙しそれを称讃することは，万人のなす所であり，またそれが当然のことではあるが，しかしいまはしばらくそれを措き，広く深い彼の諸学の中の，とくに自然学の中では，後世の人が誤りであると指摘することがないではない。これらの中から次に２つの例を上げてみよう。

（ａ） 自然落下運動の速度

彼は多くの運動を観察した結果「力は速度に比例し，また抵抗に比例する」という結論に達しこれを主張した。この命題からの推論の当然の帰結として，「自然落下の速度はその重さに比例する」という誤った結論に達した。（自然学４巻８章）

（註）アリストテレスの推論を補完し，現代ふうに表現すると次のようになるであろう。いま力をＦ，速度をv，抵抗をＲとして彼の主張を式で表現すれば，ＦはvとＲに比例するから，$\mathrm{F}=kv\mathrm{R}$（kは比例定数）ということになる。自然落下運動にこれを適用すると，力は重さ（現代物理学では質量）mに比例するから，$\mathrm{F}=k'm$（k'は比例定数）である。これら２式から$kv\mathrm{R}=k'm$，$v=\dfrac{k'm}{k\mathrm{R}}$を得る。空気中では抵抗Ｒは一定であるからＲは定数で，$\dfrac{k'}{k\mathrm{R}}=\mathrm{K}$（定数）とおくことができ，$v=\mathrm{K}m$（落下速度は重さに比例する）ということになる。

そうした理由で「重いものは軽いものよりも速く落つ」のである。例えば鉄球と羽毛とを空中で同時に落せば，空気の抵抗が大きく作用して鉄球は速く，羽毛は遅く落ち，アリストテレスの主張が近似的に正しいかに見えた。ガリレオ・ガリレイ（Galileo Galeley 1564－1642）がその誤りを指摘し訂正するまで二千年近く，このまちがった説がヨーロッパを横行したとは，実に驚くべきことであった。（実際にはその間に何人かの人が疑問を持ち，反対を唱え訂正を主張したことが記されているが，アリストテレスと中世の教会の権威のもとでは，大きい声と力とにはならなかった）

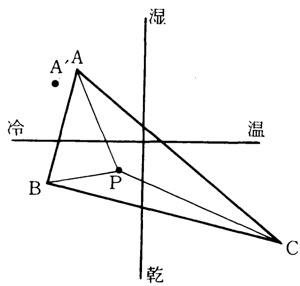
ここに生じた誤りは，彼が「物質は空間的に連続である」という考えの上

に立ったことに起因するものと思われる。「自然は真空を嫌う」というのは，真空の中では運動に対する抵抗がなくなり，Rが0となればvが限りなく大きな値をとることになり，彼の理論による自然の秩序が保てなくなる故の主張であった。すべての物質は粒子（分子，単子）によって形成されることにすると，粒子と粒子との間には，どうしても「小さい真空」の存在を認めざるを得なくなるので，それ等の前後を整合して物質の空間的連続性の主張ができたものと思われる。彼は元来観察を重視したけれども，当時は時間を精密に測定する機器がなく，自然落下運動についても十分精密なデーターをとることができず，落下距離および速度の時間に対する変化率という考えなどは起こらなかったのであろう。「変化率」という数学的思想が確立されたとき，伝統的な力学は新たに的確な形で再編成されたのであった。

（註）ニュートン以後の物理学においては，力は質量と加速度の積であるとされる。 $F = m\alpha = m\dfrac{dv}{dt}$（$m$：質量，$\alpha$：加速度，$v$：速度，$t$：時間）さらに（空気の）抵抗を考慮に入れるならば，$m\dfrac{dv}{dt} = m\alpha - kv$という微分方程式で表わされる。

（b） 錬金術の根拠

「物質は空間的に連続である」という考えと並んで，「物質は性質的にも連続である」という考えが彼にあったと推測される。湿と乾，温と冷という基本的な二方向に物性を整理し，軽重，固い柔い，粘りがある脆い，きめがこまかい粗い，等物質のもつあらゆる性質は，この基本的な二方性の複合された表現であると論じている（生成消滅論第2巻第2章)。湿乾と温冷の2方向の性質を平面上の2軸にとり，



実在するすべての物質はこの座標上のどこかに位置すると見，それらの性質は連続的に移行し得るものであると考えた。従ってある性質をもったAとい

う物質の近傍にはA′という物質があり，その性質はAときわめて類似するもので，その差をどのようにでも小さくすることは可能であると考えられる。この説を拡張して推論すれば，無限に多くの種類の物質が存在し，どの物質も湿乾・温冷の度によりそれぞれの座標に位置しているということになる。いまA，B，……C，n種の物質があり，他の物質Pが性質の座標において多角形AB……C内におさまっているならば，
$P=\dfrac{kA+mB+\cdots+nC}{q}$という関係式が成立し，逆にA，B，……C，$n$種の物質を$k$，$m$，……$n$，$q$等の値を適当に与え，混合その他の作用を加えることにより，Pという新物質を作成することも可能である。この考えは結果として中世錬金術の根拠となり得るであろう。

（註）(1) 現代科学によれば，物質は空間的にも性質的にも不連続であると考えられている。巨大な真空の中に物質粒子がその組成に従って配列し存在しているのが宇宙であるから，空間的に物質は不連続であり，また各物質（元素および化合物）の性質を決定する素粒子の数，従って原子量・分子量の値は離散的に分布し，従って分布の濃度は連続体のそれ（$\aleph$）でないのみならず，数学的稠密でさえない。物質性質の連続性をもとにして出発した錬金術が，多人数のしかも何世紀にもわたる努力にもかかわらず，不成功に終ったのは当然の結果であるといえよう。
(2) 青銅は銅と錫と合金であるが，これは銅と錫の粒子が適当に混和したのであって，銅や錫と対等の（特定の原子量をもつ）新物質ができたのではない。化合についても原子や基の段階で結合したのであって，元素の特性をもつ原子そのものが変質したのではない。

アリストテレスの科学の内容にまま見られる誤謬の原因の一つは，彼の綿密さにもかかわらず，観察範囲が限定されまた観察手段が未発達であったことであろう。しかし，こうした個々の誤りはさして根の深いものではなく，簡単に訂正し得べきものであった。さらに他の一つの原因は，彼が単に自然科学者であっただけでなく幅広い思想家でもあったため，個々の観察に終らずそれらを総合して原理を打ち出すに当って，連続の思想を底流として持ちながらこれを行ったので，個々の観察の不備が拡大された形で原理の誤りに

まで達したものと思われる。ピタゴラスが個点に目を注いで連続をゆるがせにしたのと対称的に,アリストテレスは連続の概念にこだわりとらえられて,個点に眼がとどかなかったと言えるようである。そして後者の方は同じ誤りでも数の世界に限定されることなく,実生活と関連の深い物質界のものの見方であり,さらに原理的なものであっただけに,その影響する所が広く大きかったのである。

ところでアリストテレスの場合,その誤りでさえ後世の論議の出発点となり,より幅広い学問を誘発する起因となった。「アリストテレスの真空の恐怖」(平田寛氏)から解放された近代の物理学は,ガリレオ,ニュートンに至って堰を切ったように,彼の主張する「現実立脚」「経験観察重視」の方法で奔出した。また錬金術の夢から覚めた近世の化学は,その本来の正しい方向(といまは思われる)へ前進し,大きな成果をおさめ得たのである。

4. 近代厳密主義数学からの反省

微積分学の発見以来,その周辺の研究に忙しくそして多くの成果を得た一時代を経て,近代数学がギリシア風の厳密さを再び取りもどしたのは,19世紀にはいる少し前の頃からであった。そして線分を形成する要素としての点の数(計数)であるとか,無限要素の集合の稠密および連続性などの研究が行なわれ,無限概念とのかかわりにおいて若干の進展を見たのは,19世紀も後半においてであった。

デデキント(Dedekind, C 1831−1916)は1858年に発表した「切断の理論」により,いろいろな種類の数の集合に切断(Schnitt)という作用を加えることにより,無限の要素をもつ数の集合の中での各種の数の分布の様子を明らかにした。整数の離散的分布,有理数の稠密性,実数の連続性などを厳密に掘り下げて解明した。この観点から見ると,ピタゴラスの離散的有限個数の個点による線分形成の考えなどは,根拠のない幻想であったことが分かった。

(註)(1) 稠密:限られたある区間に,限りなく多くの要素が存在するとき,

その要素は稠密に分布するという。2つの有理数 a, b $(a<b)$ があるとき，例えば $m=\dfrac{a+b}{2}$ は有理数で $a<m<b$ である。2つの有理数の間には少くとも1つの有理数が存在することになり，さらに同様の推論によって a と m, m と b の間にも有理数 p, q が存在（$a<p<m<q<b$）することになる。こうして2つの有理数 a と b との間には無限個数が入いり込むことになり，有理数の分布は稠密であることがわかる。この性質を有理数の稠密性という。

(2) 切断：ある数の集合をA，B 2つのグループに分け，

(i)その集合の要素はAかBのいずれかのグループに属させる。

(ii)AとBのそれぞれに属する要素を a, b とすると，いかなる a, b に対しても常に $a<b$ が成立する。

(iii)AとBとの境に s という数があって，s がもとの集合に属するならば，これをAかBいずれかのグループに属さしめる。

このように数の集合をA，B 2つのグループに分断することを「切断」するといい，切断（A／B）で上の状態を表わすこととする。

(a)整数の集合にこのような切断を加えた場合，A，B両グループはともに「はし」をもつことになり，このはしとはしとの間（両グループの間）には飛び(leap)がある。これから判断して整数の集合は離散的であると言える。

(b)有理数の集合を切断した場合，まず境となる s が有理数であるとき，s はどちらかのグループに入れるのであるから，A，Bのいずれか一方は s という端をもつことになり，他方にはそれがない。有理数 s に限りなく近い有理数は確定できない（存在しない）からである。つぎに s が有理数でないとき，$p<s<q$ であって，s に限りなく近い2つの有理数 p と q とは確定しない。どのように s に近い p と q とをとっても，さらに s に近い有理数が存在するからである。従ってAとBの両グループは1点 s を欠いたとぎれ(gap)を生ずる。故に有理数の集合は，その間にはさまれる非有理数，すなわち無理数によって限りなくとぎれを与えられるので，その分布は稠密ではあるがとぎれとぎれ（不連続）であることがわかる。

(c)実数の集合を s で切断したとき，s が属する方のグループには端があり，他方にはそれがない。切断したものを再び結合すると「つぎ目」を見せることなく接続する。この性質を実数の連続性という。

カントール(Georg Cantor 1845－1918) によって創始された集合論

(Mengenlehre) は近代数学の基礎を精密にならしめるのに大きな功績があったが，前項「ギリシアの数学における無限概念」ととくに関係の深いのは，計数 (cardinal number，濃度ともいう) に関する研究であった。これによると，自然数・整数・有理数等の計数は可付番無限 (可算無限，$\aleph_0$) であり，実数・複素数等の計数は非可付番無限 ($\aleph$) である。

(註) 無限集合の元が自然数と一対一に対応させ得るとき，その計数は可付番無限であるという。奇数・偶数・素数・有理数等の集合においては，その元が自然数と一対一に対応させることができるので，それらの集合の濃度は可付番無限である。また無限集合の元が自然数と一対一に対応させ得ない (対応させようとしてもその元が残る。不足することはない。不足するときは無限集合でない) とき，その集合の計数は非可付番無限であるという。実数・無理数・複素数・円や球の半径・平面上の点・空間内の直線等の集合の濃度はすべて非可付番無限である。

実数全体を一直線上に配列(数直線)すると，どの整数・有理教・無理数も，この数直線上にそれぞれの一個点を占めることになる。閉区間〔0，1〕を限って長さ1の線分 (両端の点も含む) をとると，その中に含まれる個点の数は，有理数に対応する点のみをとれば$\aleph_0$，実数に対応する点もすべて含めると$\aleph$となる。また閉区間〔0，$\sqrt{2}$〕を限って長さ$\sqrt{2}$の線分をとっても，その個点の計数について事情は，全く同じである。すなわち「線分を形成する個点の数はその線分の長さに比例する」などということは全くないのである。ここでピタゴラス学派の人たちが，「線分を形成する個点の数は数多くともかぞえ切るべきものであり，その線分の長さに比例するはずである」と考えたことは，集合論と照合して明白に誤りである。いま仮りに，彼等の考えた数珠のような点集合線分において，その数珠玉が当時知られていた有理数に対応する点であるという考えに立ったとしても，どんな長さの線分もその中に含む有理数の対応点の数はみな同じく$\aleph_0$ (稠密不連続) であるから，2つの線分の長さの比を，それ等を形成する点の数の比で表現しようとする試みは成功しなかったであろう。ピタゴラス学派の人たちは，彼等が展開した

みごとな一連の整数論的思考を，実数の世界にまで不当に拡大適用しようとし，$\sqrt{2}$ を整数比で表現しようとしてなし得なかったという，具体的な矛盾として明白にあらわれたのである。そして「無理数」は早晩数学の世界に姿を見せるべき運命にあり，「ピタゴラスの矛盾」はその予告編とも言うべきものであった。(事実そう遠くない後世に無理数の論議は現われた)

現在では，宇宙は巨大な真空の中に存在する物質粒子の集合と見られているが，アリストテレスは真空の存在を排除し，物質を空間的に連続と見たために，物理学（とくに力学）において誤りを生じた。また百にも満たぬ化学元素と，それらの組合せによって生ずる化合物とで形成される，離散的無限大を越えることのない物質の種類の数を，連続体の計数に見誤ったため，化学において誤りを生じたのである。

あ と が き

ピタゴラスもアリストテレスも，数学と哲学におけるそれぞれの巨人であるが，それでも無限の概念につまづき，矛盾と誤謬からまぬがれることができなかった。古代が彼等の前に峻厳な障壁となったのである。しかしまた，そうしたことが引き金となって，さらに厳密な推論が求められ，より正確な観察と実験が要請される結果となり，数学と自然科学との発展を誘発したのである。

これら「連続と個点」の問題は，近代の数学や自然科学が若干の光を当てたかに見えるが，それでもなお霧の中にある感が深く，人類に課せられた永遠の問題ではないかと思われる。将来これらのことがさらに明確に把握できるようになることを期待している。